Marche aléatoire sur [0,1]

[131 DÉVELOPPEMENTS, p 588]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soient $p \in [0,1]$, $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi $\zeta_0 \sim \mathcal{B}(1,p)$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi $U_0 \sim \mathcal{U}[0,1]$ telles que toutes les variables aléatoire sont indépendantes.
Soit $X_0 = x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = U_n X_n + \zeta_n(1-U_n)$.
Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\beta(p,1-p)$ lorsque $n \to +\infty$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\to} b \in \mathbb{R}$, $a \in [0,1[$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b_n$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On dispose, par convergence de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $b-\epsilon \leq b_n \leq b+\epsilon$ et alors $\underbrace{au_n + b - \epsilon}_{=:v_{n+1}} \leq u_{n+1} \leq \underbrace{au_n + b + \epsilon}_{=:w_{n+1}}$.
Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant arithmético-géométriques et convergent respectivement vers $\frac{b-\epsilon}{1-a}$ et $\frac{b+\epsilon}{1-a}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{b}{1-a}$. □

Démonstration. (*théorème*) : Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in [0,1]$. Ainsi elles admettent des moments à tout ordre. Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $m_{n,k} := \mathbb{E}[X_n^k]$. Alors on a, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}
m_{n+1,k} &= (1-p)\mathbb{E}[X_{n+1}^k \mid \zeta_n = 0] + p\mathbb{E}[X_{n+1,k} \mid \zeta_n = 1] \\
&= (1-p)\mathbb{E}[(U_nX_n)^k] + p\mathbb{E}[U_n(X_n-1)+1)^k] \\
&= (1-p)\mathbb{E}[U_n^k]\mathbb{E}[X_n^k] + p\int_0^1 \mathbb{E}[(u(X_n-1)+1)^k]du \\
&= \frac{1-p}{k+1}m_{n,k} + p\mathbb{E}\left[\int_0^1 (u(X_n-1)+1)^k du\right] \quad \text{(par FUBINI)} \\
&= \frac{1-p}{k+1}m_{n,k} + p\mathbb{E}\left[\left[\frac{(u(X_n-1)+1)^{k+1}}{(k+1)(X_n-1)}\right]_0^1 \mathbb{1}_{X_n<1} + \mathbb{1}_{X_n=1}\right] \\
&= \frac{1-p}{k+1}m_{n,k} + p\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=0}^n X_n^k}{k+1}\right] \\
&= \frac{m_{n,k}}{k+1} + \frac{p}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} m_{n,i}
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_k$: "La suite $(m_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente".

- Initialisation : Pour $k=0$, $m_{n,0} = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ d'où la convergence de la suite $(m_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $0 \leq i \leq k-1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$m_{n+1,k} = \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{:=a} m_{n,k} + \underbrace{\frac{p}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} m_{n,i}}_{:=b_n}$$

  avec $a \in [0,1[$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente par hypothèse de récurrence. Par le lemme, $m_{n,k} \underset{n\to\infty}{\to} m_k$. Ainsi, par passage à la limite, il vient :

$$m_k = \frac{p}{k}\sum_{i=0}^{k-1} m_i$$

d'où la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Montrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{H}_k : \text{"}\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad m_k = \frac{p}{k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + \frac{p}{i}\right) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (i+p)\text{"}$$

- Initialisation : Pour $k = 1$, $m_1 = p = \frac{1}{1!} \prod_{i=0}^{0} (i-p)$.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathcal{H}_i$ vraie pour tout $i \leq k$.
  On a :
  $$\begin{aligned} m_{k+1} &= \frac{p}{k+1} \left[1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{k} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{p}{j}\right)\right] \quad (\text{car } (\mathcal{H}_i)_{i \in \{1,\dots,k\}} \text{ vraies}) \\ &= \frac{p}{k+1} \prod_{i=0}^{k} \left(1 + \frac{p}{i}\right) \end{aligned}$$
  d'où la propriété $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

Par railleurs, pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\beta(p, 1-p)^k] &= \frac{1}{\beta(p, 1-p)} \int_0^1 t^k t^{p-1} (1-t)^{-p} dt \\ &= \frac{\beta(p+k, 1-p)}{\beta(p, 1-p)} \\ &= \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (i+p) \end{aligned}$$

Ainsi, $m_{n,k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\beta(p, 1-p)^k]$ donc on a :

$$m_{n,k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^k \underbrace{\frac{t^{p-1}(1-t)^{-p}}{\beta(p, 1-p)}}_{=: f_{p,1-p}(t)} dt$$

Ainsi, pour toute fonction polynomiale $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[g(X_n)] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(t) f_{p,1-p}(t) dt$$

Soient $\phi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ continue bornée et $\epsilon > 0$ fixé. En vertu du théorème de WEIERSTRASS, il existe un polynôme $g_\epsilon : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $||\phi - g_\epsilon||_\infty$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\mathbb{E}[\phi(X_N)] - \int_0^1 \phi(t) f_{p,1-p}(t) dt\right| \leq \epsilon + \left|\mathbb{E}[g_\epsilon(X_n)] - \int_0^1 \phi(t) f_{p,1-p}(t) dt\right|$$

D'où, par passage à la limite, et comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on en conclut que :

$$\mathbb{E}[\phi(X_n)] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \phi(t) f_{p,1-p}(t) dt$$

d'où le résultat. □

Remarques :

- Le développement est long et calculatoire : on pourra survoler (ou même admettre dans un premier temps) le lemme.
- Il faut être en mesure de savoir remontrer le résultat qui suit, utilisé dans le développement :
  $$\forall p, q \in \{z \in \mathbb{C}, \ \Re(z) > 0\}, \quad \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$
- Il faut être en mesure d'expliquer sur un schéma ce que l'on modélise sur le segment $[0, 1]$ (On a en fait : $X_{n+1} = (1-\zeta_n)U_n X_n + \zeta_n(U_n X_n + (1-U_n)1)$).
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est en fait une chaîne de MARKOV à espace d'état infini non dénombrable.